

最佳软门限去噪

刘英霞¹, 王欣²

(1. 山东省广播电视学校, 山东济南 250014 2. 山东大学信息科学与工程学院, 山东济南 250100)

摘要: 近年来, 在小波变换域实现信号的滤波引起了人们的极大重视, 一些滤波方法也相继被提出. 利用软门限来对信号的噪声加以滤除, 是其中的一种重要方法. 由于它操作方便, 抑制噪声的效果好, 故一经提出便在信号去噪中得到了重要应用. 本文给出了一种最佳的软门限去噪方法, 它与原有方法相比较可以给出更好的滤波结果.

关键词: 小波变换; 软门限; 信号去噪

中图分类号: TN957.53 **文献标识码:** A **文章编号:** 0372-2112 (2006) 01-0167-03

Optimal Soft Thresholding for Signal Denoising

LU Ying-xia¹, WANG Xin²

(1. School of Broadcasting and TV Shandong, Jinan, Shandong 250014 China;

2. School of Information Science and Technology, Shandong University, Jinan, Shandong 250100 China)

Abstract In recent years, filtering in wavelet domain became an important research field. Also, some new methods were developed. Denoising based on the soft thresholding is the famous one of them. Simple and effective make it attractive in many applications of signal denoising. In this paper, the optimal soft thresholding is presented. Compared with the soft thresholding, the proposed approach can give better results in signal denoising.

Key words wavelet transform; soft thresholding; signal denoising

1 引言

小波变换作为一种新的方法, 在信号去噪中得到了重要应用. Mallat 等^[1]首先提出了一种最大模重建的方法, 它主要利用信号的小波变换系数的极大模值, 来重建原始信号. 从而达到抑制信号中的噪声的目的. Donoho^[2]则提出了一种软门限去噪的方法. Nowak^[3]提出一种自适应小波收缩算法, 用于消除信号中的长拖尾噪声. P. Moulin^[4]提出了一种小波系数最大后验估计方法. Starck 等^[5]提出了一种曲线小波变换.

尽管人们提出了许多不同的小波域去噪的方法, 由于软门限方法简单有效, 故受到人们的广泛注意. 一些改进算法也相继被提出^[6-9].

本文利用最小均方误差准则, 首先介绍了一般化软门限去噪的定义, 然后推导出了在最小均方误差的条件下对于不同噪声分布的最佳去噪算法. 理论分析和实例表明相对于软门限方法, 本文所给出的算法可以产生更好的去噪结果.

2 软门限去噪的定义

为给出一般化软门限去噪的定义, 我们首先介绍软门限算法. 令 y_l , θ_l 和 w_l 分别为输入信号、原始信号和噪声分量的离散小波变换系数, $l \in Z$ 为整数下标. 那么可以用下式表示其关系

$$y_l = \theta_l + w_l \quad (1)$$

在这里, 我们假设 w_l 为零均值, 方差等于 σ_w^2 的 Gauss 白噪声. 为了从理论上证明软门限方法是一种最小最大估计, 式 (1) 需要重新写为式 (2)

$$y_l = \theta_l + \delta u_l \quad (2)$$

其中 $\delta = \sigma_w \sqrt{2 \log N}$, 为门限值; N 表示输入信号的长度; u_l 为噪声项, 满足 $|u_l| \leq 1$. 在上述的假设下, 由软门限所给出的小波系数的估计值为

$$\theta_l = \begin{cases} \text{sgn}(y_l) (|y_l| - \delta), & |y_l| > \delta \\ 0, & |y_l| \leq \delta \end{cases} \quad (3)$$

根据上述定义可以看出, 当混有噪声的小波系数的幅

值大于门限值 δ 时, 其幅值减少 δ 反之变为零.

由于信号的能量集中于少量的小波系数上, 具有较高的幅值; 而噪声的能量分布在较多的小波变换系数上, 幅值较小. 这样一来, 经过上述的软门限方法处理后, 幅度较小的噪声分量的小波系数被置为零, 而幅度较大的信号的小波系数被保留. 经过再建后, 就得到了去噪后的信号.

需要指出的是为了得到信号的最小最大估计, Donoho 的软门限算法的理论前提是假定 u_i 满足的条件 $|u_i| \leq 1$, 即假设噪声的幅度是有限的. 实际上, 在 w_i 为 Gauss 白噪声时, u_i 亦是一 Gauss 白噪声. 故 $|u_i| \leq 1$ 条件只在 δ 取较大值时近似成立. 换句话说, 软门限只能在最小最大误差条件的限制下, 给出一个近似的最佳估计. 因此为了消除这一条件限制, 并适应 w_i 为不同噪声的情况, 下面将给出在最小均方差条件下的最佳软门限去噪算法.

3 最佳软门限去噪

为对软门限去噪方法进行改进, 文献 [9] 给出了它一般化形式的定义:

$$\theta = \begin{cases} \text{sgn}(y_i) (|y_i| - a\delta), & |y_i| > \delta \\ 0 & |y_i| \leq \delta \end{cases} \quad (4)$$

这里 $0 \leq a \leq 1$ 是一待定参数. 显然, 当 $a = 0$ 或 $a = 1$ 时, 由式 (4) 给出的一般化软门限去噪就分别变成了通常的硬门限和软门限去噪. 下一步, 就是要根据最小均方差准则确定 a 的值, 以便得到信号的最佳估计.

利用式 (2), 我们可以把式 (4) 重新写成:

$$\theta_i - \theta = \begin{cases} \delta[u_i - \text{sgn}(y_i)a], & |y_i| > \delta \\ -\theta_i & |y_i| \leq \delta \end{cases} \quad (5)$$

由此得到

$$\begin{aligned} E[(\theta_i - \theta)^2] &= E[\theta_i^2 | |y_i| \leq \delta] + \delta^2 E[(u_i - \text{sgn}(y_i)a)^2 | |y_i| > \delta] \\ &= E[\theta_i^2 | |y_i| \leq \delta] + \delta^2 E[(|u_i| - a)^2 | \text{sgn}(y_i) = \text{sgn}(u_i), \\ & \quad |y_i| > \delta] + \delta^2 E[(|u_i| + a)^2 | \text{sgn}(y_i) \neq \text{sgn}(u_i), |y_i| > \delta] \end{aligned} \quad (6)$$

为了求出 a 的最佳值, 可以令

$$\frac{\partial E[(\theta_i - \theta)^2]}{\partial a} = 0 \quad (7)$$

可以推出

$$a = (E[|u_i| | \text{sgn}(y_i) = \text{sgn}(u_i), |y_i| > \delta] - E[|u_i| | \text{sgn}(y_i) \neq \text{sgn}(u_i), |y_i| > \delta]) / (P_+ + P_-) \quad (8)$$

其中

$$P_+ = \text{Pr}\{\text{sgn}(y_i) = \text{sgn}(u_i), |y_i| > \delta\} \quad (9)$$

$$P_- = \text{Pr}\{\text{sgn}(y_i) \neq \text{sgn}(u_i), |y_i| > \delta\} \quad (10)$$

因此, 当概率分布 u_i 和 θ_i 为已知时, 通过式 (1), (8), (9), (10) 及数值计算的方法, 就可以求出最佳的值 a

在实际应用中, 为了给出 a 的一个近似结果, 我们可以假设

$$E[|u_i| | \text{sgn}(y_i) = \text{sgn}(u_i), |y_i| > \delta] \approx E[|u_i|] P_+ \quad (11)$$

$$E[|u_i| | \text{sgn}(y_i) \neq \text{sgn}(u_i), |y_i| > \delta] \approx E[|u_i|] P_- \quad (12)$$

这样, 就得到了 a 的一个近似表达式

$$a \approx E[|u_i|] \frac{P_+ - P_-}{P_+ + P_-} \quad (13)$$

下面就讨论在不同的噪声情况下, a 的具体取值.

情形 1 噪声分布 $u_i = \pm 1$ 及 $\text{Pr}\{u_i = 1\} = \text{Pr}\{u_i = -1\} = 1/2$ 即噪声以等概率取 1 和 -1 两个值. 此时, $E[|u_i|] = 1$. 故由式 (10) 可以得到

$$a_1 = \frac{P_+ - P_-}{P_+ + P_-} \quad (14)$$

情形 2 噪声项 u_i 为区间 $[-1, 1]$ 上的均匀分布. 此时 $E[|u_i|] = 1/2$ 由式 (10) 可以得到

$$a_2 = \frac{1}{2} \frac{P_+ - P_-}{P_+ + P_-} \quad (15)$$

情形 3 噪声项 u_i 为均值是零, 方差是 1 的正态分布. 此时 $E[|u_i|] \approx 0.6774$ 利用式 (10), 我们有

$$a_3 = 0.6774 \frac{P_+ - P_-}{P_+ + P_-} \quad (16)$$

为了对式 (11) 进一步简化, 我们讨论 P_- 的取值. 实际上, 由式 (2) 可以得到 $\text{sgn}(y_i) \neq \text{sgn}(u_i)$, 且 $|y_i| > \delta$ 的必要条件为 $|u_i| > \delta$ 它表明

$$P_- = \text{Pr}\{\text{sgn}(y_i) \neq \text{sgn}(u_i) | |y_i| > \delta\} \leq \text{Pr}\{|u_i| > \delta\} \quad (17)$$

考虑到信号边缘处的能量比较集中, 故仅仅有极少的小波系数的幅度超过门限 δ 故 $\text{Pr}\{|u_i| > \delta\} = \epsilon \ll 1$ 从而根据式 (17) 可以假定 $P_- \approx 0$ 将该值代入式 (14), (15) 和 (16) 就得到 $a_1 = 1$, $a_2 = 1/2$ 及 $a_3 = 0.6774$ 这一结果表明软门限方法只是在噪声为二值分布时, 可以给出最好的结果; 而对 Gauss 白噪声, 当式 (4) 中的 $a = 0.6774$ 时, 才会给出信号的最佳估计.

4 试验结果

下面举例比较软门限和一般化软门限对图像去噪的结果. 为方便起见, 这里采用 Harr 小波, 且所有的操作仅在小波变换的第一个尺度上进行.

图 1(a) 是 256×256 的 Lena 图像. 把该图像叠加方差为 100 200 300 和 400 的 Gauss 白噪声后, 分别利用软门限和一般化软门限方法进行处理, 所得的信噪比改进的结果示于表 1 中.

表 1

噪声方差	100	200	300	400
软门限	0.1518dB	0.4244dB	1.3696dB	2.0006dB
最佳软门限	0.5818dB	1.3211dB	2.2326dB	2.9246dB

图 1(b) 为原始图像叠加方差为 300 的 Gauss 白噪声后的图像. 图 1(c) 和 (d) 为分别应用软门限和最佳化软门限对图 1b 处理后的图像.

由上面的结果可以看出, 所提出的方法与原有方法相比较, 给出了更好的去噪结果.

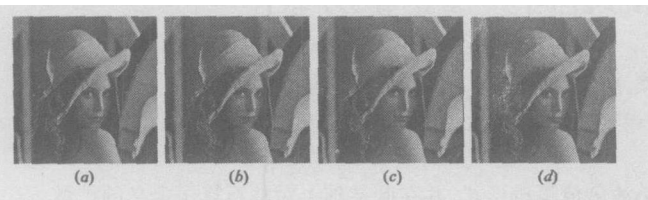


图 1 (a)原始的 Lena 图像 (b)叠加方差为 300 Gauss 白噪声后的 Lena 图像 (c)采用软门限滤波后的图像 (d)采用最佳软门限滤波后的图像

5 结论

软门限去噪由于简单有效,故在小波域去噪中得到了广泛的应用。在使用中人们逐渐发现由于软门限给出的门限过高,从而使小波的收缩量过大,边缘会变得模糊。一个简单的改进方法就是减小门限的值,即减少边缘收缩,但其结果使软门限的去噪能力变弱。本文首先给出了软门限去噪的一般化的表示方法,然后根据最小均方误差准则推导出在不同噪声分布的情况下小波系数的最佳收缩量,即参数 α 的值。最后通过实例验证了所提出的方法的可行性。

参考文献:

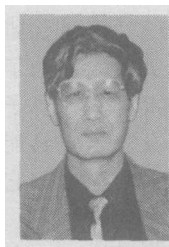
- [1] S Malik, S Zhong. Characterization of signals for multiscalar edges[J]. IEEE Trans on PAMI, 1992, 14(7): 710- 732
- [2] D Donoho. Denoising by soft thresholding[J]. IEEE Trans on IT, 1995, 41(5): 613- 627
- [3] R D Nowak. Wavelet-based Bayesian noise removal for magnetic resonance imaging[J]. IEEE Trans on IP, 1999, 8(10): 1408- 1419
- [4] P Moulin, J Liu. Analysis of multiresolution image denoising schemes using generalized gaussian and complexity priors[J]. IEEE Trans on IT, 1999, 45(4): 909- 919

- [5] Jean-Luc Starck, E J Candes, D Donoho. The curvelet transform for image denoising. IEEE Trans Image Processing[J]. IEEE Trans on IP, 2002, 11(6): 670- 684
- [6] Q Pan, L Zhang. Two denoising methods by wavelet transform[J]. IEEE Trans on SP, 1999, 47(12): 3401- 3406
- [7] 张磊, 潘泉, 张洪才, 戴冠中. 小波域滤波域值参数 α 的选取[J]. On the determination of threshold in threshold-based denoising by wavelet transformation[J]. 电子学报, 2001, 29(3): 400- 403
- Zhang Lei, Pan Quan, et al. On the determination of threshold in threshold-based denoising by wavelet transformation[J]. Acta Electronica Sinica, 2001, 29(3): 400- 403 (in Chinese)
- [8] L Sendur, I W Selesnk. Bivariate shrinkage functions for wavelet-based denoising exploiting interscale dependency[J]. IEEE Trans on IP, 2002, 47(11): 2744- 2756
- [9] X Wang. Nonlinear Multi-Wavelet Transform Based Soft Thresholding[C]. In Conf IEEE APCCAS, Tianjin, 2000, 775- 778

作者简介:



刘英霞 女, 1973年 5月生于山东文登, 2003年 6月在山东大学信息科学与工程学院获得硕士学位, 现为该学院信号与信息处理专业博士研究生, 研究方向为图像处理与计算机视觉。E-mail: LYX228@sohu.com.



王欣男, 1947年 4月出生于山东宁津, 教授, 博士生导师, 1990年在北京邮电大学获博士学位, 研究方向为非线性滤波、图像处理与计算机视觉, 现为中国电子学会电路与系统分会委员。